Colle du 12/11 - Sujet 1
Fonctions usuelles et équations complexes

Question de cours.

1. Enoncer la formule reliant les carrés des fonctions hyperboliques et celle sur arctan.
2. Justifier la dérivabilité de la fonction arcsin et calculer sa dérivée.

Exercice 1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $2\arcsin(x) = \arcsin\left(2x\sqrt{1-x^2}\right)$.

Exercice 2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(2z+1)^4 = (z+1)^4$.

Colle du 12/11 - Sujet 2
Fonctions usuelles et équations complexes

Question de cours.

1. Tracer le graphe de la fonction arccosinus et arctan, y faire apparaitre les valeurs remarquables, les tangentes remarquables, les asymptotes remarquables.
2. Enoncer et démontrer la relation entre $\arctan(x)$ et $\arctan\left(\frac{1}{x}\right)$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $\left(\frac{3z+i}{z-i}\right)^2 + \left(\frac{3z+i}{z-i}\right) + 1 = 0$.

Exercice 2. Etudier la fonction $f : x \mapsto \arcsin\left(3x - 4x^3\right)$.

Colle du 12/11 - Sujet 3
Fonctions usuelles et équations complexes

Question de cours.

1. Donner les racines d'un trinôme. On veillera à bien définir toutes les quantités.
2. Démonstration de l'écriture polaire des racines n-ièmes de l'unité.

Exercice 1.

1. Soit $a \in \mathbb{R}$, développer $\text{sh}(2a)$.
2. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$. Calculer $P_n = \prod_{k=1}^{n} \text{ch}\left(\frac{x}{2^k}\right)$.

Exercice 2. On considère l'équation suivante d'inconnu $z \in C$:

$$z^3 - (1+2i)z^2 + 3(1+i)z - 10(1+i) = 0. \qquad \text{(E)}$$

1. Déterminer les solutions imaginaires pures de (E).
2. Résoudre l'équation (E) dans $\mathbb{C}$.
3. Quelle est la nature du triangle dont les sommets ont pour affixe les solutions de l'équation précédente ?